

A 01.01.06
2 - 96

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ԺԱՐՏԱՐԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱԼՍԱՐԱՆ
(Պոլիտեխնիկ)

Ղումաշյան Հեղինե Էդիսոնի

Չորս երկարությամբ հավասարակշռված {2,3}-գերնույնությունները
հակադարձելի հանրահաշիվներում և զուգորդական
{3}-գերնույնությունները կիսախմբերում

Ա.01.06-«Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
զիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՍԱԳԻՐ

Երևան 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ
(Политехник)

Гумашян Гегинэ Эдисоновна

Уравновешенные {2,3}-сверхтождества длины четыре в обратимых алгебрах и
ассоциативные {3}-сверхтождества в полугруппах

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.06-"Алгебра и теории чисел"

Ереван 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհրդի նիստում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր,
պրոֆեսոր Յու.Ս. Մովսիսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Պ.Ս. Գևորգյան
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ա.Շ. Մալխասյան

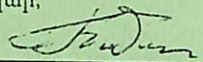
Առաջատար կազմակերպություն՝ Խ. Աբովյանի անվան հայկական պետական
մանկավարժական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011 թ. հունիսի 24-ին ժամը 15.00-ին Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանում գործող 053 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 0009, Տերյան, 105, մասնաշենք 12:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2011թ. մայիսի 23-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր

 Ա.Ն. Բաբայան

Тема диссертации утверждена на заседании совета факультета математики и механики Ереванского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физ. мат. наук, профессор Ю.М. Мовсисян

Официальные оппоненты: доктор физ. мат. наук П.С. Геворкян
кандидат физ. мат. наук А.Ш. Малхасян

Ведущая организация: Армянский государственный педагогический
университет им. Х. Абовяна

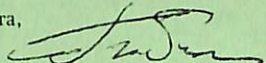
Защита диссертации состоится 24 июня 2011 г., в 15.00 часов на заседании специализированного совета 053 действующего в Государственном инженерном университете Армении по адресу: г. Ереван, 0009, ул. Терьяна 105, корпус 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке государственного инженерного университета Армении.

Автореферат разослан 23 мая 2011г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ. мат. наук



 А.О. Бабалян

3659-2011

Աշխատանքի ընդհանուր բնութագիրը

Թեմայի հրատապությունն ու արդիականությունը: Ներկայացվող աշխատանքը նվիրված է չորս երկարությամբ հավասարակշռված $\{2,3\}$ - գերնույնությունների ուսումնասիրությանը հակադարձելի հանրահաշիվներում և զուգորդական $\{3\}$ - գերնույնությունների ուսումնասիրությանը կիսախմբերում:

Վերհիշենք, որ հետևյալ տեսքի երկրորդ կարգի բանաձևը կոչվում է գերնույնություն.

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n \quad (W_1 = W_2), \quad (1)$$

որտեղ W_1, W_2 -ը $X_1, \dots, X_m$ ֆունկցիոնալ և $x_1, \dots, x_n$ առարկայական փոփոխականներով այբուբենում տրված բառեր (թերմեր) են: Սակայն գերնույնությունը սովորաբար գրվում է առանց քվանտորային նախածանցների, այսինքն՝ $W_1 = W_2$ տեսքով: Ըստ սահմանման՝ $(W_1 = W_2)$ գերնույնությունը բավարարվում է (Q, Σ) հանրահաշիվում կամ (Q, Σ) հանրահաշիվը բավարարում է $(W_1 = W_2)$ գերնույնությանը, եթե այդ հավասարությունը ճիշտ է, երբ նրա յուրաքանչյուր X_i ֆունկցիոնալ փոփոխական փոխարինվում է նույն տեղայնությամբ Σ -ի ցանկացած գործողությամբ, իսկ յուրաքանչյուր x_j առարկայական փոփոխական՝ Q -ի ցանկացած տարրով:

(1) գերնույնությունը կոչվում է ոչ տրիվիալ, եթե $m > 1$, և տրիվիալ, եթե $m = 1$: m բնական թիվը կոչվում է (1) գերնույնության ֆունկցիոնալ ռանգ, իսկ n -ը՝ առարկայական ռանգ:

Հավասարակշռված նույնությունները քվազիխմբերում առաջին անգամ հետազոտվել են Վ.Դ. Բելոուսովի կողմից: Երեք երկարությամբ հավասարակշռված գերնույնությունները զուգորդական գերնույնություններն են և դրանց դասակարգումը հակադարձելի հանրահաշիվներում տրվել են Վ.Դ. Բելոուսովի կողմից: Սակայն երեք-տեղանի ֆունկցիոնալ փոփոխական պարունակող չորս երկարությամբ հավասարակշռված գերնույնությունների դասակարգումը հակադարձելի հանրահաշիվներում մինչ այժմ մնում է բաց: Կ. Դենեկի, Յ. Կոպալցի, Լ. Պոլակի, Գ. Պասեմանի հետազոտություններում բնու-

թագրվել են այն կիսախմբերը, որոնք բազմանդամային ձևով բավարարում են բինար զուգորդական գերնույնությանը: Սակայն երեք-տեղանի զուգորդական գերնույնություններին բավարարող կիսախմբերի նկարագրությունը մինչ այժմ մնացել է բաց:

Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները: Ատենախոսության նպատակն է դասակարգել երեք-տեղանի ֆունկցիոնալ փոփոխական պարունակող չորս երկարությամբ հավասարակշռված գերնույնությունները հակադարձելի հանրահաշիվներում և բնութագրել այն հակադարձելի հանրահաշիվները, որոնց մեջ տեղի ունեն այդ գերնույնությունները: Այնուհետև բնութագրել այն կիսախմբերը, որոնք բազմանդամային ձևով բավարարում են երեք-տեղանի զուգորդական գերնույնություններին:

Ատենախոսության հիմնական խնդիրներն են.

- դասակարգել հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ {2,3}-գերնույնությունները հակադարձելի {2,3}-հանրահաշիվներում;
- հետազոտել երկտեղ խմբային գործողությամբ այն հակադարձելի {2,3}-հանրահաշիվները, որոնք բավարարում են հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ {2,3}-գերնույնություններին;
- հետազոտել երեք-տեղանի խմբային գործողությամբ այն հակադարձելի {2,3}-հանրահաշիվները, որոնք բավարարում են հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ {2,3}-գերնույնություններին;
- բնութագրել բոլոր այն կիսախմբերի դասերը, որոնք բազմանդամային ձևով բավարարում են զուգորդական {3}-գերնույնություններին:

Հետազոտման օբյեկտը: Ատենախոսության մեջ հետազոտվում են հակադարձելի {2,3}-հանրահաշիվները, {2,3}-գերնույնությունները, {3}-գերնույնությունները, {2,3}-գերնույնություններին բավարարող և երկտեղ խմբային գործողությամբ հակադարձելի {2,3}-հանրահաշիվները, {2,3}-գերնույնություններին բավարարող և երեք-տեղանի խմբային գործողությամբ հակադարձելի {2,3}-հանրահաշիվները, զուգորդական {3}-գերնույնություններին բազմանդամային ձևով բավարարող կիսախմբերի դասերը, որոնք բազմաձևություններ են:

Հետազոտման մեթոդները: Ատենախոսության մեջ օգտագործվում են քվադրատիկ և N -քվադրատիկ մեթոդներ, ավտոտոպիաների և քվադրատոմորֆիզմների խմբերը, ինչպես նաև N -տեղանի գործողության ներկայացումները ցածր տեղանի գործողությունների միջոցով: Օգտագործվում են նաև կիսախմբային նույնությունների բավարարող բազմանդամներ:

Արդյունքների նորությունը: Աշխատանքում ներկայացված բոլոր հիմնական արդյունքները նոր են:

Արդյունքների կիրառական նշանակությունը: Ստացված արդյունքները կարող են կիրառվել քվադրատիկ և լուպաների տեսության մեջ, երկրորդ կարգի բանաձևերի և երկրորդ կարգի լեզուների ուսումնասիրության մեջ, ինչպես նաև հակադարձելի և ունիվերսալ հանրահաշիվների հետազոտություններում:

Ստացված արդյունքների ապրոքացիան: Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ-ի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի հանրահաշիվի և երկրաչափության ամբիոնի գիտական սեմինարներում և CSIT 2009 միջազգային գիտաժողովում:

Հրապարակումները: Ատենախոսության թեմայով հրատարակվել են չորս աշխատություններ, որոնց ցուցակը բերված է սեղմագրի վերջում:

Ատենախոսության կառուցվածքն ու ծավալը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ցանկից, ներածությունից, երեք զլուխներից, եզրահանգումից և օգտագործված գրականության ցանկից: Աշխատանքի ծավալը կազմում է 74 էջ:

Ատենախոսության բովանդակությունը

Ներածության մեջ հիմնավորված են թեմայի հրատապությունն ու արդիականությունը, հետազոտության նպատակներն ու խնդիրները, ձևակերպված են ուսումնասիրման օբյեկտները և մեթոդները, աշխատանքի նորությունը, ինչպես նաև ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը:

Առաջին գլխում ներկայացվում են ընդհանուր բնույթի գաղափարներ ու արդյունքներ՝ աշխատանքում օգտագործված մեթոդների վերաբերյալ:

1.1 պարագրաֆում ներմուծվում են հանրահաշիվի, հակադարձելի հանրահաշիվի, քվադրատիկ, լուպայի, N -տեղանի խմբի գաղափարները:

$Q(A)$ գույգը, որտեղ A -ն n -տեղանի գործողություն է, կոչվում է n -տեղանի քվադիխումբ, եթե $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}$ հավասարության մեջ կամայական n տարրեր $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ -ից միարժեքորեն որոշում են $n+1$ -րդը: Այլ կերպ ասած, $Q(A)$ -ն հանդիսանում է n -տեղանի քվադիխումբ, եթե

$$A(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b$$

հավասարումն ունի միակ լուծում կամայական $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in Q$ տարրերի համար և կամայական $i = 1, 2, \dots, n$ քվերի համար: Այդ դեպքում A գործողությունը կոչվում է քվադիխումբային գործողություն: $n = 1$ դեպքում A գործողությունը կլինի բիեկցիա, $n = 2$ դեպքում n -տեղանի $Q(A)$ քվադիխումբը կոչվում է բինար քվադիխումբ կամ պարզապես քվադիխումբ, իսկ $n = 3$ դեպքում n -տեղանի $Q(A)$ քվադիխումբը կոչվում է երեք-տեղանի քվադիխումբ:

n -տեղանի $Q(A)$ քվադիխումբը կոչվում է (i, j) -գուգորդական, եթե տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{i-1}, A(x_i, \dots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \dots, x_{2n-1}) &= \\ = A(x_1, \dots, x_{j-1}, A(x_j, \dots, x_{j+n-1}), x_{j+n}, \dots, x_{2n-1}) \end{aligned}$$

n -տեղանի $Q(A)$ քվադիխումբը կոչվում է n -տեղանի խումբ, եթե այն (i, j) -գուգորդական է կամայական i -ի և j -ի համար: $n = 2$ դեպքում n -տեղանի $Q(A)$ խումբը կոչվում է բինար խումբ կամ պարզապես խումբ, իսկ $n = 3$ դեպքում n -տեղանի $Q(A)$ խումբը կոչվում է երեք-տեղանի խումբ: Այսպիսով, երեք-տեղանի $Q(A)$ քվադիխումբը կոչվում է երեք-տեղանի խումբ, եթե տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$A(A(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5) = A(x_1, A(x_2, x_3, x_4), x_5) = A(x_1, x_2, A(x_3, x_4, x_5))$$

1.2 պարագրաֆում ներմուծվում է իզոտոպիայի գաղափարը և նրա հիմնական հատկությունները:

Դիտարկենք երկու A և B գործողությունները, որոնք որոշված են միևնույն Q բազմության վրա:

Սահմանում 1.2.1: B գործողությունը կոչվում է իզոտոպ A գործողությանը, եթե գոյություն ունեն Q բազմության α, β, γ տեղադրությունների եռյակը այնպիսին, որ

$$B(x, y) = \gamma^{-1} A(\alpha x, \beta y), \quad \forall x, y \in Q:$$

$T = (\alpha, \beta, \gamma)$ կարգավորված եռյակը կոչվում է իզոտոպիա, իսկ α, β, γ տեղադրությունները համապատասխանաբար՝ T իզոտոպիայի ձախ, աջ և գլխավոր բաղադրիչներ: $B = A^T$ հավասարությունը նշանակում է, որ A և B գործողությունները իզոտոպ են:

1.3 պարագրաֆում բերված են քվադիխմբի ավտոտոպիայի և քվադիավտոմորֆիզմի սահմանումները, ինչպես նաև ապացուցված են մի շարք լեմմաներ քվադիավտոմորֆիզմների վերաբերյալ, որոնք օգտագործվում են հետագա ապացույցների մեջ:

Դիցուք $Q(\cdot)$ -ը քվադիխումբ է, իսկ α -ն, β -ն և γ -ն Q բազմության որոշակի տեղադրություններ են:

Սահմանում 1.3.1: Q բազմության $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ կարգավորված եռյակը կոչվում է $Q(\cdot)$ քվադիխմբի ավտոտոպիա, եթե

$$\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y) = x \cdot y, \quad \forall x, y \in Q:$$

α, β, γ տեղադրությունները կոչվում են T ավտոտոպիայի համապատասխանաբար ձախ, աջ և գլխավոր բաղադրիչներ: Եթե $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ կարգավորված եռյակը $Q(A)$ քվադիխմբի ավտոտոպիա է, ապա կգրենք այսպես՝ $A^T = A$:

Սահմանում 1.3.2: $Q(\cdot)$ քվադիխմբի T ավտոտոպիայի գլխավոր բաղադրիչը կոչվում է $Q(\cdot)$ քվադիխմբի քվադիավտոմորֆիզմ, այսինքն՝ եթե գոյություն ունեն Q բազմության α և β տեղադրություններն այնպիսին, որ

$$\gamma(x \cdot y) = \alpha x \cdot \beta y, \quad (1.3.1)$$

$(T = (\alpha, \beta, \gamma))$ կարգավորված եռյակը $Q(\cdot)$ քվադիխմբի ավտոտոպիա է:

Լեմմա 1.3.3: $Q(\cdot)$ խմբի ցանկացած քվադիավտոմորֆիզմ ունի $\gamma = R_S \gamma_0$ տեսքը, որտեղ γ_0 -ն $Q(\cdot)$ խմբի որևէ ավտոմորֆիզմ է, իսկ S -ը Q բազմության

որևէ տարր է, և հակառակը, այդ հավասարությամբ որոշվող γ տեղադրությունը կլինի $Q(\cdot)$ խմբի քվադրատոմորֆիզմ:

1.4 պարագրաֆում ներկայացվում է Գլուսկին-Խոսուի թեորեմը, որը հնարավորություն է տալիս n -տեղանի խմբային գործողությունը ներկայացնել երկտեղանի (բինար) խմբային գործողության միջոցով:

Թեորեմ (Գլուսկին-Խոսու): Ենթադրենք $Q(A)$ -ն n -տեղանի խումբ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $Q(\cdot)$ բինար խումբ և այդ խմբի այնպիսի θ ավտոմորֆիզմ, որ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \theta x_2 \theta^2 x_3 \dots \theta^{n-2} x_{n-1} \theta^{n-1} x_n c,$$

որտեղ c -ն Q բազմության որևէ տարր է, ընդ որում տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

$$\theta^{n-1} x = c x c^{-1}, \quad \theta c = c:$$

1.5 պարագրաֆում բերվում են q -հանրահաշվի և e -հանրահաշվի սահմանումները:

Սահմանում 1.5.1: $Q(\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է q -հանրահաշիվ, եթե Σ -ում գոյություն ունի հակադարձելի գործողություն, այսինքն՝ $Q(A)$ -ն քվադրատոմորֆ է որևէ $A \in \Sigma$ գործողության համար: $Q(\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է հակադարձելի, եթե $Q(A)$ -ն քվադրատոմորֆ է ցանկացած $A \in \Sigma$ գործողության համար:

Սահմանում 1.5.2: $Q(\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է e -հանրահաշիվ, եթե Σ -ում գոյություն ունի միավորով գործողություն, այսինքն՝ $Q(A)$ -ն ունի միավոր որևէ $A \in \Sigma$ գործողության համար:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ $\{2,3\}$ -գերնույնությունների ուսումնասիրությանը հակադարձելի հանրահաշիվներում:

2.1 պարագրաֆում տրվում են հավասարակշռված գերնույնության, առաջին սեռի գերնույնության, գերնույնության երկարության, $\{2,3\}$ -հանրահաշվի, ոչ տրիվիալ

հանրահաշվի գաղափարները: Ներմուծվում են երկտեղանի և երեք-տեղանի սինգուլյար ֆունկցիոնալ փոփոխականների սահմանումները:

Եթե $W_1 = W_2$ գերնույնության մեջ մասնակցող ֆունկցիոնալ փոփոխականները տեղայնությունները՝ $|X_1| = n_1, \dots, |X_m| = n_m$, ապա $W_1 = W_2$ գերնույնությունը կոչվում է $\{n_1, \dots, n_m\}$ -գերնույնություն: Գերնույնությունը կոչվում է հավասարակշռված, եթե այդ գերնույնության յուրաքանչյուր առարկայական փոփոխական մասնակցում է հավասարության երկու մասերում, ընդ որում միայն մեկ անգամ: Հավասարակշռված գերնույնությունը կոչվում է առաջին սեռի, եթե առարկայական փոփոխականները հավասարության ձախ և աջ մասերում կարգավորված են միատեսակ: Առարկայական փոփոխականների քանակը հավասարակշռված գերնույնության մեջ կոչվում է այդ գերնույնության երկարություն:

Երկու-տեղանի և երեք-տեղանի գործողություններով (Q, Σ) հանրահաշիվը կոչվում է $\{2,3\}$ -հանրահաշիվ: $\{2,3\}$ -հանրահաշիվը կոչվում է ոչ տրիվիալ, եթե նրա երկու-տեղանի և երեք-տեղանի գործողությունների բազմությունները մեկ տարրանի չեն:

W բառի բոլոր առարկայական փոփոխականների բազմությունը կնշանակենք $[W]$ -ով, իսկ W բառի բոլոր ֆունկցիոնալ փոփոխականների բազմությունը կնշանակենք $W[-]$ -ով:

Սահմանում 2.1.1: $X \in W_1 \cup W_2$ երկտեղանի ֆունկցիոնալ փոփոխականը կոչվում է սինգուլյար $W_1 = W_2$ գերնույնության մեջ, եթե նրա մեջ X ֆունկցիոնալ փոփոխականը հանդիպում է ընդամենը մեկ անգամ և տեղի ունեն հետևյալ պայմաններից գոնե մեկը՝
ա) $W = X(\omega_1, \omega_2)$ ենթաբառում գոյություն ունեն այնպիսի $x \in [\omega_1]$ և $y \in [\omega_2]$ առարկայական փոփոխականներ, որ դրանցից յուրաքանչյուրը W ենթաբառում հանդիպում է միայն մեկ անգամ,

բ) $W = X(\omega_1, \omega_2)$ ենթաբառը ունի կամ $X(\omega_1, x)$ տեսքը, կամ $X(x, \omega_2)$ տեսքը, և գոյություն ունի x -ից տարբեր այնպիսի $y \in [W]$ առարկայական փոփոխական, որը W ենթաբառում հանդիպում է ընդամենը մեկ անգամ:

Սահմանում 2.1.2: $X \in [W_1 \cup W_2]$ երեք-տեղանի ֆունկցիոնալ փոփոխականը կոչվում է սինգուլյար $W_1 = W_2$ գերնույնության մեջ, եթե նրա մեջ X ֆունկցիոնալ փոփոխականը հանդիպում է ընդամենը մեկ անգամ և տեղի ունեն հետևյալ պայմաններից զոնե մեկը՝

ա) $W = X(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ենթաբառում գոյություն ունեն այնպիսի $x \in [\omega_1]$, $y \in [\omega_2]$ և $z \in [\omega_3]$ առարկայական փոփոխականներ, որ դրանցից յուրաքանչյուրը W ենթաբառում հանդիպում է միայն մեկ անգամ,

բ) $W = X(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ենթաբառը ունի կամ $X(\omega_1, \omega_2, x)$ տեսքը, կամ $X(\omega_1, x, \omega_3)$ տեսքը, կամ $X(x, \omega_2, \omega_3)$ տեսքը, և գոյություն ունեն x -ից տարբեր այնպիսի $y, z \in [W]$ առարկայական փոփոխականներ, որոնք W ենթաբառում հանդիպում են ընդամենը մեկական անգամ, ընդ որում $y \in [\omega_i]$, $z \in [\omega_j]$ և $i \neq j$:

Այնուհետև ապացուցվում է հետևյալ արդյունքը:

Լեմմա 2.1.1: Ոչ տրիվիալ հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշվում չի կարող տեղի ունենալ երկտեղանի կամ երեք-տեղանի սինգուլյար ֆունկցիոնալ փոփոխականով որևէ գերնույնություն:

2.2 պարագրաֆում դասակարգվում են հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ $\{2,3\}$ -գերնույնությունները ոչ տրիվիալ հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշիվներում: Դրանք են՝

$$X(Y(x, y, z), u) = X(x, Y(y, z, u)), \quad (2.2.1)$$

$$Y(X(x, y), u, v) = Y(x, X(y, u), v), \quad (2.2.2)$$

$$Y(X(x, y), u, v) = Y(x, y, X(u, v)), \quad (2.2.3)$$

$$X(Y(x, y, z), u) = Y(X(x, y), z, u), \quad (2.2.4)$$

$$X(Y(x, y, z), u) = Y(x, X(y, z), u), \quad (2.2.5)$$

$$X(Y(x, y, z), u) = Y(x, y, X(z, u)): \quad (2.2.6)$$

2.3 պարագրաֆում բնութագրվում են երկտեղ խմբային գործողությամբ այն հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշիվները, որոնք բավարարում են հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ $\{2,3\}$ -գերնույնություններին: Ստացվում են չորս երկարությամբ հավասարակշռված $\{2,3\}$ -գերնույնությունների իրացնելիության վերաբերյալ հայտանիշներ՝ հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշիվներում, երբ վերջինս պարունակում է երկտեղ խմբային գործողություն:

Թեորեմ 2.3.1: Ենթադրենք $Q(\Sigma)$ հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշվում գոյություն ունի այնպիսի $(\cdot) \in \Sigma$ բինար գործողություն, որ $Q(\cdot)$ -ը խումբ է: Այդ դեպքում $Q(\Sigma)$ հանրահաշվում տեղի ունի

$$X(Y(x, y, z), u) = X(x, Y(y, z, u)) \quad (2.3.1)$$

գերնույնությունը այն և միայն այն դեպքում, երբ յուրաքանչյուր $A_i \in \Sigma$ երեք-տեղանի գործողություն որոշվում է հետևյալ օրենքով՝

$$A_i(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \cdot t_i,$$

որտեղ t_i -ն տարր է $Q(\cdot)$ խմբի կենտրոնից, այսինքն՝ $t_i \in Z(Q)$, իսկ յուրաքանչյուր $B_j \in \Sigma$ բինար գործողություն որոշվում է

$$B_j(x, y) = \alpha_j(x \cdot y),$$

օրենքով, որտեղ $\alpha_j : Q \rightarrow Q$ -ն բիեկցիա է:

Համանման ձևով ձևակերպվում և ապացուցվում են նաև մյուս հինգ թեորեմները:

2.4 պարագրաֆում բնութագրվում են երեք-տեղանի խմբային գործողությամբ այն հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշիվները, որոնք բավարարում են հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ $\{2,3\}$ -գերնույնություններին: Ստացվում են չորս երկարությամբ հավասարակշռված $\{2,3\}$ -գերնույնությունների իրացնելիության վերա-

բերյալ հայտանիշներ՝ հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշիվներում, երբ վերջինս պարունակում է երեք-տեղանի խմբային գործողություն:

Թեորեմ 2.4.1: Ենթադրենք $Q(\Sigma)$ հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշվում գոյություն ունի այնպիսի $A \in \Sigma$ երեք-տեղանի գործողություն, որ $Q(A)$ -ն երեք-տեղանի խումբ է: Այդ դեպքում $Q(\Sigma)$ հանրահաշվում տեղի ունի

$$X(Y(x, y, z), u) = X(x, Y(y, z, u)) \quad (2.4.1)$$

գերնույնությունը այն և միայն այն դեպքում, երբ յուրաքանչյուր $A_i \in \Sigma$ երեք-տեղանի քվադրիխմբային գործողություն որոշվում է հետևյալ օրենքով՝

$$A_i(x, y, z) = x \cdot \theta y \cdot c \cdot z \cdot t_i,$$

իսկ յուրաքանչյուր $B_j \in \Sigma$ բինար քվադրիխմբային գործողություն որոշվում է

$$B_j(x, y) = \alpha_j(x \cdot \theta y),$$

օրենքով, որտեղ $Q(\cdot)$ -ը խումբ է, θ -ն $Q(\cdot)$ խմբի ավտոմորֆիզմ է, $t_i, c \in Q$, $\theta c = c$, $\theta(t_i) = t_i$, $\theta^2(x) = c \cdot x \cdot c^{-1}$, t_i -ն տարր է $Q(\cdot)$ խմբի կենտրոնից՝ $t_i \in Z(Q)$, $\alpha_j : Q \rightarrow Q$ -ն բիեկցիա է:

Համանման ձևով ձևակերպվում և ապացուցվում են նաև մյուս հինգ արդյունքները:

Երրորդ գլուխը նվիրված է զուգորդական $\{3\}$ -գերնույնությունների ուսումնասիրությանը կիսախմբերում: Նկարագրվում են այն կիսախմբերի դասերը, որոնք բազմանդամային ձևով բավարարում են զուգորդական $\{3\}$ -գերնույնություններին:

3.1 պարագրաֆում բնութագրվում են այն կիսախմբերը, որոնցում բազմանդամային ձևով տեղի ունի հետևյալ երեք-տեղանի զուգորդական գերնույնությունը՝

$$F(F(x, x, y), x, x) = F(x, x, F(y, x, x)) \quad (3.1.1)$$

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3.1.1: Որպեսզի (3.1.1) գերնույնությունը բազմանդամային ձևով տեղի ունենա $Q(\cdot)$ կիսախմբում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $Q(\cdot)$ կիսախմբում տեղի ունենան հետևյալ 4 նույնությունները՝

$$\begin{cases} x^3 = x^2, \\ xyx^2yx = (xy)^2x, \\ x^2(yx)^2 = x^2y^2x, \\ (xy)^2x^2 = xy^2x^2: \end{cases} \quad (*)$$

3.2 պարագրաֆում ներկայացվում են երեք-տեղանի զուգորդական այլ գերնույնությունների բազմանդամային ձևով տեղի ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները կիսախմբերում:

Հիմնական արդյունքները և եզրահանգումները

Ատենախոսության մեջ ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. Դասակարգվել են հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ $\{2,3\}$ -գերնույնությունները հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշիվներում:
2. Բնութագրվել են երկտեղ խմբային գործողությամբ այն հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշիվները, որոնք բավարարում են հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ $\{2,3\}$ -գերնույնություններին:
3. Բնութագրվել են երեք-տեղանի խմբային գործողությամբ այն հակադարձելի $\{2,3\}$ -հանրահաշիվները, որոնք բավարարում են հավասարակշռված առաջին սեռի չորս երկարությամբ $\{2,3\}$ -գերնույնություններին:
4. Բնութագրվել են այն կիսախմբերի դասերը, որոնք բազմանդամային ձևով բավարարում են զուգորդական $\{3\}$ -գերնույնություններին:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրատարակված
աշխատությունների ցանկ

1. Г. Э. Гумашян, Об обратимых $\{2,3\}$ -алгебрах, Ученые записки ЕГУ, 2008, № 1, стр. 141-142.
2. H. E. Ghumashyan, On $\{2,3\}$ -hyperidentities in invertible $\{2,3\}$ -algebras with a binary group operation, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, 2009, № 3, p. 37-41.
3. H. E. Ghumashyan, The $\{2,3\}$ -hyperidentities in invertible $\{2,3\}$ -algebras, Computer Science and Information Technologies, 28 September-2 October, 2009, Yerevan, Armenia, p. 59, (with Yu. Movsisyan).
4. Г. Э. Гумашян, О $\{2,3\}$ -сверхтождествах в обратимых $\{2,3\}$ -алгебрах с тернарной групповой операцией, Изв. НАН Армении. Матем., том 45, н. 3, 2010, стр. 47-56.

РЕЗЮМЕ

Гумашян Гегинэ Эдисоновна

Уравновешенные $\{2,3\}$ -сверхтождества длины четыре в обратимых алгебрах, и ассоциативные $\{3\}$ -сверхтождества в полугруппах

Представленная работа посвящена изучению уравновешенных $\{2,3\}$ -сверхтождеств длины четыре в обратимых алгебрах и изучению ассоциативных $\{3\}$ -сверхтождеств в полугруппах.

Следующая формула второго порядка называется сверхтожеством:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (W_1 = W_2), \quad (1)$$

где $X_1, \dots, X_m$ – функциональные переменные, а $x_1, \dots, x_n$ – предметные переменные в словах (термах) W_1, W_2 . Обычно, сверхтождества указываются без кванторной приставки, т.е. как равенство: $W_1 = W_2$.

Согласно определению, сверхтождество $W_1 = W_2$ выполняется в алгебре (Q, Σ) , или алгебра (Q, Σ) удовлетворяет сверхтождеству $W_1 = W_2$, если это равенство верно, когда его каждая функциональная переменная X_i заменяется любой операцией той же ариности из Σ , а каждая предметная переменная x_j – любым элементом из Q .

Если ариности функциональных переменных соответственно равны: $|X_1| = n_1, \dots, |X_m| = n_m$, то сверхтождество $W_1 = W_2$ называется $\{n_1, \dots, n_m\}$ -сверхтожеством.

Сверхтождество называется уравновешенным, если каждая предметная переменная этого сверхтождества участвует в обеих частях равенства, причем только один раз. Уравновешенное сверхтождество называется первого рода, если предметные переменные в левой и правой частях равенства упорядочены одинаково.

The Balanced {2, 3}-Hyperidentities of Length Four in Invertible Algebras and
{3}-Hyperidentities of Associativity in Semigroups

The present dissertation is devoted to the study of balanced {2, 3}-hyperidentities of length four in invertible algebras and {3}-hyperidentities of associativity in semigroups.

The following second order formula is called a hyperidentity:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (W_1 = W_2), \quad (1)$$

where $X_1, \dots, X_m$ are the functional variables, and $x_1, \dots, x_n$ are the objective variables in words (terms) of W_1, W_2 . Usually, a hyperidentity is specified without universal quantifiers of the prefix of the equality, $W_1 = W_2$.

According to the definition, the hyperidentity, $W_1 = W_2$, is said to be satisfied in the algebra, (Q, Σ) , if this equality holds whenever every functional variable X_i is replaced by an arbitrary operation of the corresponding arity – from Σ and every objective variable x_j is replaced by an arbitrary element – from Q .

If the arities are: $|X_1| = n_1, \dots, |X_m| = n_m$, then the hyperidentity, $W_1 = W_2$, is called a $\{n_1, \dots, n_m\}$ -hyperidentity. A hyperidentity is balanced, if each objective variable of the hyperidentity occurs in both parts of the equality, $W_1 = W_2$, only once.

A balanced hyperidentity is called the first sort hyperidentity, if the objective variables in the left and right parts of the equality are ordered identically.

The number of objective variables in a balanced hyperidentity is called the length of this hyperidentity.

Количество предметных переменных в уравновешенном сверхтождестве называется длиной этого сверхтождества.

Алгебра (Q, Σ) с бинарными и тернарными операциями называется {2,3}-алгеброй. {2,3}-алгебра называется нетривиальной, если их множества бинарных и тернарных операций состоят из более, чем одного элемента.

Уравновешенные тождества в квазигруппах впервые рассмотрены В. Д. Белоусовым. Уравновешенные сверхтождества длины три – суть ассоциативные сверхтождества, и их классификация в обратимых алгебрах, а также в е-алгебрах и q-алгебрах дана В. Д. Белоусовым и Ю. М. Мовсисяном.

Однако классификация уравновешенных сверхтождеств с тернарным функциональным символом длины четыре в обратимых алгебрах оставалось открытой.

В исследованиях К. Денека, Ю. Коппица, Л. Полака и Г. Пасемана охарактеризованы те полугруппы, которые полиномиально удовлетворяют тривиальному сверхтождеству бинарной ассоциативности.

Однако описание полугрупп полиномиально удовлетворяющих тернарному сверхтождеству ассоциативности оставалось открытым.

Целью настоящей диссертационной работы – классификация уравновешенных сверхтождеств длины четыре, содержащие тернарный функциональный символ в обратимых алгебрах, а также описание тех обратимых алгебр, в которых они выполняются.

Кроме того, в диссертационной работе характеризуются те полугруппы, которые полиномиально удовлетворяют тернарным сверхтождествам ассоциативности.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Классифицированы уравновешенные {2,3}-сверхтождества первого рода длины четыре в обратимых алгебрах.
2. Описаны те обратимые {2,3}-алгебры с бинарной групповой операцией, которые удовлетворяют уравновешенным {2,3}-сверхтождествам длины четыре первого рода.
3. Описаны те обратимые {2,3}-алгебры с тернарной групповой операцией, которые удовлетворяют уравновешенным {2,3}-сверхтождествам длины четыре первого рода.
4. Описаны те классы полугрупп, которые полиномиально удовлетворяют {3}-сверхтождествам ассоциативности.

The algebra (Q, Σ) with the binary and ternary operations is called $\{2,3\}$ -algebra. $\{2,3\}$ -algebra is called non-trivial, if the sets of its binary and ternary operations are not singleton.

The balanced identities in quasigroups were first investigated by V. D. Belousov. The balanced hyperidentities of length three are associative hyperidentities, and their classification in invertible algebras, as well as in e-algebras and q-algebras are given by V. D. Belousov and Yu. M. Movsisyan. But the classification of balanced hyperidentities with ternary functional variable in invertible algebras still remains open.

The investigations carried out by K. Denecke, J. Koppitz, L. Polak, G. Paseman characterize the semigroups that polynomially satisfy the binary associative hyperidentity, while the description of the semigroups that polynomially satisfy the ternary associative hyperidentities has remained open.

The present thesis aims at classifying the balanced $\{2,3\}$ -hyperidentities of length four in invertible algebras and description of the invertible algebras in which these hyperidentities hold, as well as the description of the semigroups that polynomially satisfy ternary associative hyperidentities.

The following main results have been proved in the thesis.

1. The balanced first sort $\{2,3\}$ -hyperidentities of length four in non-trivial invertible algebras are classified.
2. The invertible $\{2,3\}$ -algebras with a binary group operation in each and with the balanced first sort $\{2,3\}$ -hyperidentities of length four are described.
3. The invertible $\{2,3\}$ -algebras with a ternary group operation in each and with the balanced first sort $\{2,3\}$ -hyperidentities of length four are described.
4. The classes of the semigroups, which polynomially satisfy the associative $\{3\}$ -hyperidentities are described.



